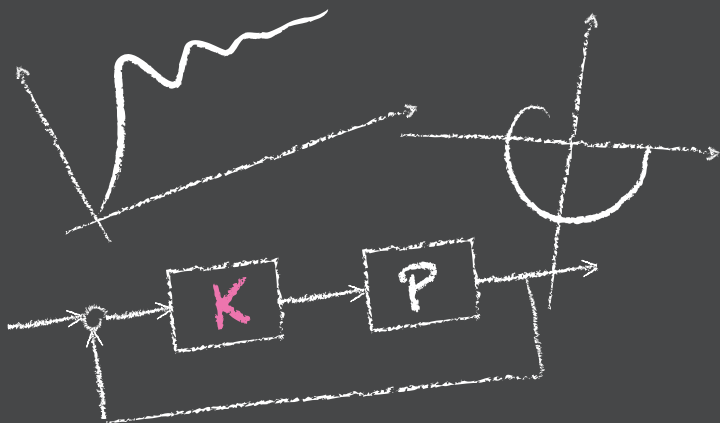


制**御系設計論**

章末問題解答



本書で用いる表記

変換

- $f(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ 連続時間信号 $f(t)$ の Laplace 変換
- $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ 逆 Laplace 変換
- $f(z) = \mathcal{Z}[f](z)$ 離散時間信号 $f[k]$ の Z 変換

集合

- \mathbb{R} 実数からなる集合
- \mathbb{R}^n n 次の実ベクトルからなる集合
- $\mathbb{R}^{m \times n}$ $m \times n$ の実行列からなる集合
- \mathbb{C} 複素数からなる集合
- \mathbb{C}_+ $\operatorname{Re}[s] > 0$ であるような複素数 s からなる集合
- \mathbb{C}^n n 次の複素ベクトルからなる集合
- $\mathbb{C}^{m \times n}$ $m \times n$ の複素行列からなる集合
- \mathbb{RH}_∞ 安定かつプロパーな有理関数の集合

ベクトル・行列

- \mathbf{I} ($\mathbf{I}_{m \times n}$) $(m \times n)$ の単位行列
- \mathbf{O} ($\mathbf{O}_{m \times n}$) $(m \times n)$ の零行列, 行列の要素としての零ベクトル
- $\mathbf{0}$ 零ベクトル
- \mathbf{M}^\top 行列 \mathbf{M} の転置
- $\mathbf{M}^{1/2}$ $\mathbf{M} = (\mathbf{M}^{1/2})^\top (\mathbf{M}^{1/2})$ を満たす正方行列
- $\det \mathbf{M}, |\mathbf{M}|$ 正方行列 \mathbf{M} の行列式
- $\operatorname{rank} \mathbf{M}$ 行列 \mathbf{M} のランク (階数)
- $\operatorname{trace} \mathbf{M}$ 行列 \mathbf{M} のトレース
- $\mathbf{M} \succ \mathbf{O}$ 正方行列 \mathbf{M} が正定
- $\mathbf{M} \succeq \mathbf{O}$ 正方行列 \mathbf{M} が半正定

その他

- $\delta(t)$ Dirac のデルタ関数
- $u_s(t)$ 単位ステップ関数
- $\mathcal{E}[\cdot]$ 期待値作用素
- $\phi_{\mathbf{A}}(s)$ 行列 \mathbf{A} の特性多項式
- $\text{Re}[\lambda]$ 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ の実部
- $\text{Im}[\lambda]$ 複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ の虚部

表記の基本的な規則

- スカラー 小文字アルファベットのイタリック体 (a, b, k, u, y)
- ベクトル 小文字アルファベットのボールドイタリック体 ($\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{d}$)
- 行列 大文字アルファベットのボールドイタリック体 ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{P}$)
- システム 大文字小文字アルファベットの筆記体 ($\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{S}$)

章末問題解答

2022.4.13 更新

- [1 章の章末問題](#)
- [2 章の章末問題](#)
- [3 章の章末問題](#)
- [4 章の章末問題](#)
- [5 章の章末問題](#)
- [6 章の章末問題](#)
- [7 章の章末問題](#)
- [8 章の章末問題](#)
- [9 章の章末問題](#)
- [10 章の章末問題](#)
- [11 章の章末問題](#)
- [12 章の章末問題](#)
- [13 章の章末問題](#)
- [14 章の章末問題](#)

1 章

- 【1】本文中で述べた例のほかに、たとえば計測工学，生産工学，管理工学，建築学，情報処理などが考えられる。このほか，直接は動詞を使っていないが，生理学と薬学の関係は，物理学と制御工学の関係に類似しているかもしれない。
- 【2】少し離れた場所にマイクとスピーカーがある状況を考える。マイクに向かって音声を発すると，アンプで増幅された音声スピーカーから出力される。増幅された音声は，少し遅れ，かつ減衰してマイクに達し，ふたたびマイクに拾われることになる。減衰が少ないと，もとの音声と加え合わされた音量が発散することで，ハウリングが生じる（マイク-スピーカー系は制御でよく用いる負帰還ではなく，正帰還であることに注意）。

- 【3】 関節のガタ、ギヤのバックラッシュ、静止摩擦に起因する不感帯、台座の振動、ロボットアームのたわみ、温度変化・ホコリの混入・経年劣化などによる摩擦係数の変化、アナログ信号に混入するノイズ、電子回路の寄生容量・寄生インダクタンス、モータドライバの飽和、電源電圧の変動、半導体の反応遅延、マイコンの演算遅れ、センサの分解能限界、など。
- 【4】 液体を入れる容器を作ることを考える。軽さ、堅牢性、耐腐食性、加工のしやすさ、コスト、密閉性など。

[トップへ戻る](#)

2 章

- 【1】 (常微分方程式の解)

(1) $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ とすると、Laplace 変換の微分の性質から

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{y}(t)] &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}[\ddot{y}(t)] &= s\mathcal{L}[\dot{y}(t)] - \dot{y}(0) = s(sY(s) - y(0)) - \dot{y}(0) \\ &= s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\end{aligned}$$

※一般に、 $y(t)$ の k 階微分 $y^{(k)}(t)$ の Laplace 変換は以下のようになる。

$$\mathcal{L}[y^{(k)}(t)] = s^k Y(s) - s^{k-1}y(0) - s^{k-2}\dot{y}(0) - \dots - sy^{(k-2)}(0) - y^{(k-1)}(0)$$

常微分方程式の両辺を Laplace 変換すると

$$\begin{aligned}s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) &= 0 \\ (s^2 + 4s + 3)Y(s) &= sy(0) + \dot{y}(0) + 4y(0) \\ Y(s) &= \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 3}\end{aligned}$$

右辺を部分分数展開すると

$$\begin{aligned}\frac{s + 4}{(s + 1)(s + 3)} &= \left\{ \frac{s + 4}{s + 3} \right\}_{s+1=0} \frac{1}{s + 1} + \left\{ \frac{s + 4}{s + 1} \right\}_{s+3=0} \frac{1}{s + 3} \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s + 3}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + 1} \right] = e^{-t}, \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + 3} \right] = e^{-3t}$$

であるから、

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

(2) 両辺を Laplace 変換すると

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = sy(0) + \dot{y}(0) + 2y(0)$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

分母に重複根があるので、部分分数展開の際には注意が必要である。

$$\frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1}$$

を満たす A, B を求めると、 $A = 1, B = 1$ となる（もしくは、付録に述べた Heaviside の展開定理を用いればよい）。また、

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2} \right] = te^{-t}$$

であるから、

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = te^{-t} + e^{-t} = (t+1)e^{-t}.$$

【2】 (RLC 回路の伝達関数)

回路を流れる電流を $i(t)$ とすると、Kirchhoff の電圧則から、

$$v_i(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_L(t)$$

R, L, C それぞれについての基本法則から

$$v_R(t) = Ri(t)$$

$$\int_0^t i(\tau) d\tau = Cv_C(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

が成り立つ。したがって

$$v_i(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + sL \frac{d}{dt} i(t)$$

$V_i(s) = \mathcal{L}[v_i(t)]$, $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$ とし、すべての変数の初期値を 0 とおいて両辺を Laplace 変換すると、

$$V_i(s) = \left(R + \frac{1}{Cs} + Ls \right) I(s)$$

$$I(s) = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

を得る。最後に,

$$V_R(s) = RI(s)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$V_L(s) = sLI(s)$$

の関係から, v_i から v_R, v_C, v_L までの伝達関数はそれぞれ

$$\frac{V_R(s)}{V_i(s)} = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{V_C(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{V_L(s)}{V_i(s)} = \frac{LCs^2}{LCs^2 + RCs + 1}$$

となる。

【3】 (式 (2.15) の導出)

$$\mathbf{R} := s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & s + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

とにおいて, \mathbf{R} を第 n 行目について余因子展開する。

$$\tilde{R}_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{(n+1)+(n-1)} = 1$$

$$\tilde{R}_{n2} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+2+n-2}s = s$$

⋮

$$\tilde{R}_{n,n-1} = (-1)^{2n-1} \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2n-1+1} s^{n-2} = s^{n-2}$$

$$\tilde{R}_{nn} = (-1)^{2n} \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s \end{vmatrix} = (-1)^{2n} s^{n-1} = s^{n-1}$$

となる。したがって、余因子展開により

$$\begin{aligned} \phi \mathbf{A}(s) &= |\mathbf{R}| = a_0 \tilde{R}_{11} + \cdots + a_{n-2} \tilde{R}_{n-1,1} + (s + a_{n-1}) \tilde{R}_{nn} \\ &= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_0 \end{aligned}$$

を得る。また、 \mathbf{B} は第 1 要素のみ 1 であとは 0 であるので、 $\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}$ は \mathbf{C} と \mathbf{R}^{-1} の第 n 列との内積である。したがって、 $m < n$ の場合は

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B} &= \frac{1}{|\mathbf{R}|} (C_1 \tilde{R}_{n1} + \cdots + C_n \tilde{R}_{nn}) = \frac{1}{|\mathbf{R}|} (b_0 \tilde{R}_{n1} + \cdots + b_m \tilde{R}_{m+1,1}) \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

$m = n$ の場合は

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B} + D \\ &= \frac{1}{|\mathbf{R}|} ((b_0 - b_n a_0) \tilde{R}_{n1} + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \tilde{R}_{n,n-1}) + b_n \\ &= \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} - b_n \frac{a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} + b_n \\ &= \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

【4】 (常微分方程式からの状態方程式への変換)

本文中で述べたように、 $y(t), \dot{y}(t)$ の組を状態変数としてもうまく表現できない

い。ここでは、いったん u と y の関係を伝達関数に表すこととし、初期値をすべて 0 において両辺を Laplace 変換しよう。

$$s^2 Y(s) + sY(s) + Y(s) = U(s) + sU(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

これを、本文の式 (2.13) の方法を用いて状態方程式になおすと

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

なお、ここから状態と出力、入力との関係を逆算すると、 $y = x_1 + x_2$ より $\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u$ から \dot{x}_1, \dot{x}_2 を消去することで

$$x_1 = u - \dot{y}, \quad x_2 = -u + \dot{y} + y$$

であることがわかる。内部状態には y とその高階微分だけでなく、 u の情報も含まれていることになる。

【5】 (伝達関数から状態方程式への変換)

本文の式 (2.13) の方法を用いて

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

【6】 (線形近似)

状態変数を $\mathbf{x} := [x_1, x_2]^\top = [\theta, \dot{\theta}]^\top$ とする。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$m\ell^2 \dot{x}_2 = -mg\ell \sin x_1 + u$$

より、非線形状態方程式は

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 + \frac{1}{m\ell^2} u \end{bmatrix}$$

垂下状態 $\mathbf{x}^* = [0, 0]^\top$, $u^* = 0$ のときには $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, u^*) = 0$ である。 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, $\bar{u} = u - u^*$ において, この近傍で線形近似を行うと

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{u}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, u^*) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos x_1 & 0 \end{array} \right] \bigg|_{\substack{x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ u = 0}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}(\mathbf{x}^*, u^*) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ m\ell^2 \end{array} \right]$$

出力を θ とすると,

$$y = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

u から y までの伝達関数 \mathcal{G}_{yu} は

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{yu}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{s^2 + g/\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{m\ell^2 s^2 + mg\ell} \end{aligned}$$

[トップへ戻る](#)

3 章

【1】 (ステップ応答の導出の別解)

【1 次系のステップ応答】

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{G}(s) \frac{1}{s} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s(Ts + 1)} \right] \\ &= K \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} \right] \\ &= K \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T} \right] \\ &= K \left(1 - e^{-t/T} \right) \end{aligned}$$

【2 次系のステップ応答】

($\zeta > 1$ の場合) $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s - p_1)(s - p_2)$ とおいて,

$$\begin{aligned}
 y_s(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{G}(s) \frac{1}{s} \right] \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K p_1 p_2}{s(s - p_1)(s - p_2)} \right] \\
 &= K p_1 p_2 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p_1 p_2} \frac{1}{s} + \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)} \frac{1}{s - p_1} - \frac{1}{p_2(p_1 - p_2)} \frac{1}{s - p_2} \right] \\
 &= K \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{s - p_1} - \frac{p_1}{s - p_2} \right) \right] \\
 &= K \left(1 + \frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \right)
 \end{aligned}$$

【2】 $\mathcal{G}(j\omega)$ と $\mathcal{G}(-j\omega)$ の関係

$\mathcal{G}(s)$ の分母多項式を $D(s)$ を s について偶数次の項 $D_0(s)$ と奇数次の項 $D_1(s)$ に分けて $D(s) = D_0(s) + D_1(s)$ とし, 同様に分子多項式も $N(s) = N_0(s) + N_1(s)$ とする。いずれも実係数の多項式であるので,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}[D(j\omega)] &= D_0(j\omega), \quad \operatorname{Im}[D(j\omega)]/j = D_1(j\omega) \\
 D_0(-j\omega) &= D_0(j\omega), \quad D_1(-j\omega) = -D_1(j\omega) \\
 D(-j\omega) &= \bar{D}(j\omega)
 \end{aligned}$$

の関係がある。 $N(s)$ についても同様に $N(-j\omega) = \bar{N}(j\omega)$ であるので,

$$\mathcal{G}(-j\omega) = \bar{\mathcal{G}}(j\omega).$$

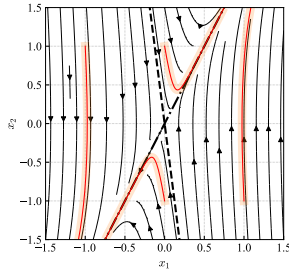
【3】 (状態方程式の解とふるまい)

$$\begin{aligned}
 (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ -16 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+8)(s-2)} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ 16 & s \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+8)(s-2)} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 16 & -8 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+8} \right) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 16 & -8 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{10} \frac{1}{s-2} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 16 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \frac{1}{s+8} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

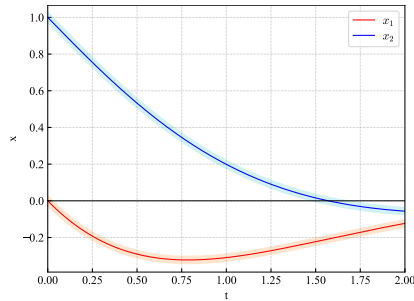
より,

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{A}t} &= \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\
 &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8e^{2t} & e^{2t} \\ 16e^{2t} & 2e^{2t} \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2e^{-8t} & e^{-8t} \\ 16e^{-8t} & -8e^{-8t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

状態空間での回の振る舞いの概形と，初期状態 $\mathbf{x}_0 = [0, 1]^\top$ から発した解の時間応答はそれぞれ以下のとおり。 \mathbf{A} は正の固有値 2 と負の固有値 -8 をもつので，サドル型の振る舞いを示している。



解図 3.1: 解の振る舞い



解図 3.2: 状態変数の応答 ($\mathbf{x}_0 = [0, 1]^\top$)

【 4 】 (状態方程式の解)

(1) $e^{\mathbf{A}t}$ を求める

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}\right] \end{aligned}$$

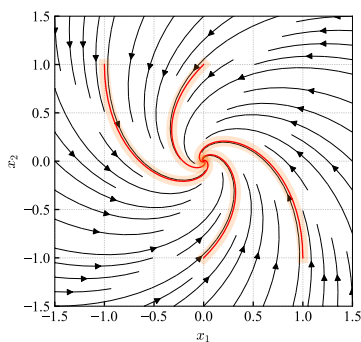
各要素を逆ラプラス変換するために、分母を平方完成してみると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2 + 2s + 2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 1^2}\right] = e^{-t} \cos t \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2s + 2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 1^2}\right] = e^{-t} \sin t \end{aligned}$$

よって

$$e^{-\mathbf{A}t} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

のように、指数減衰 e^{-t} と回転行列の積となる。状態空間での解のふるまいは以下のとおり。



解図 3.3: 解の振る舞い

(2) (ゼロ状態応答とゼロ入力応答の合成)

$u(t) \equiv 1$ のときのゼロ状態応答は

$$\mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} d\tau = - \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) d\tau$$

不定積分の公式

$$\int e^{-t} \sin t dt = -\frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t)$$

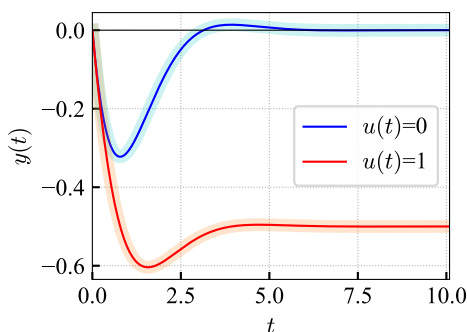
を用いると,

$$\mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} d\tau = \frac{1}{2} [e^{-\tau}(\sin \tau + \cos \tau)]_0^t = \frac{1}{2} (e^{-t}(\sin t + \cos t) - 1)$$

となる。出力 $y(t)$ はゼロ入力応答とゼロ状態応答の和なので

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} d\tau \\ &= -e^{-t} \sin t + \frac{1}{2} (e^{-t}(\sin t + \cos t) - 1) \end{aligned}$$

応答の概形を、比較のためのゼロ入力応答 ($u(t) \equiv 0$ の場合) とともに示す。



解図 3.4: 初期状態 $\mathbf{x}_0 = [0, 1]^T$ からの応答 $y(t)$ (定数入力 0, 1 の場合)

【 5 】 (正弦波応答)

入力のラプラス変換 $U(s)$ は

$$U(s) = \mathcal{L}[5 \sin 100t] = \frac{500}{s^2 + 10000}$$

これを入力した時の応答は

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{G}(s)U(s)] = 500\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+10}\frac{1}{s^2+10000}\right] \\
&= 500\frac{1}{10100}\left(\frac{1}{s+10} + \frac{-s+10}{s^2+10000}\right) \\
&= \frac{5}{101}\left(e^{-10t} - \cos 100t + \frac{1}{10}\sin 100t\right) \\
&= \frac{5}{101}\left(e^{-10t} + \sqrt{\frac{101}{100}}\sin(100t + \theta)\right)
\end{aligned}$$

ただし $\theta = \tan^{-1}(-10) \approx -84.3[\text{deg}]$ である。第 1 項は t の増大とともに指数的に 0 に収束するので、定常応答 $y_{\infty}(t)$ は

$$\begin{aligned}
y_{\infty}(t) &= 5 \cdot \frac{1}{10\sqrt{101}}\sin(100t + \theta) \\
y(t) &\rightarrow y_{\infty}(t)(t \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

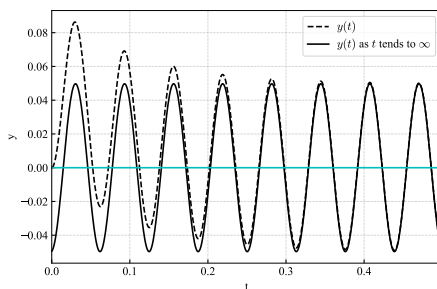
となる。なお、 $\omega = 100$ のときの周波数特性を計算してみると

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(100j) &= \frac{1}{10+100j} = \frac{1}{10} \frac{1-10j}{101} \\
|\mathcal{G}(100j)| &= \frac{1}{10\sqrt{101}} \approx -40[\text{dB}], \quad \angle\mathcal{G}(100j) = \tan^{-1}(-10)
\end{aligned}$$

となり、

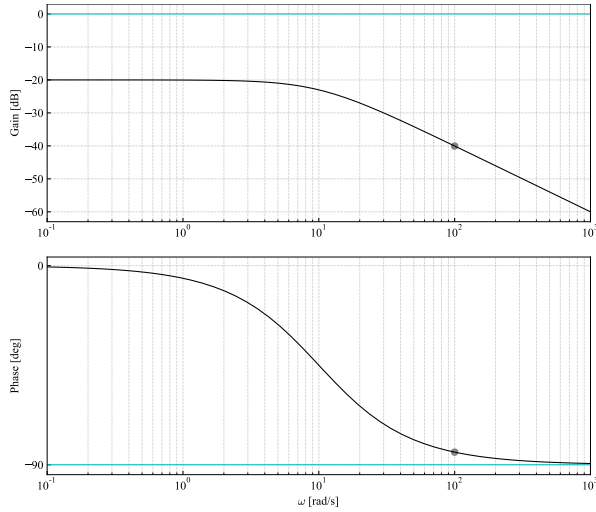
$$y_{\infty}(t) = 5 \cdot |\mathcal{G}(100j)| \sin(100t + \angle\mathcal{G}(100j))$$

を満たしていることがわかる。実際の $y(t)$ と定常応答 $y_{\infty}(t)$ は下図のとおり。



解図 3.5: 正弦波応答

また、参考までに $\mathcal{G}(s)$ の Bode 線図を以下に示す。



解図 3.6: Bode 線図 (黒丸は $\omega = 100[\text{rad/s}]$ の点

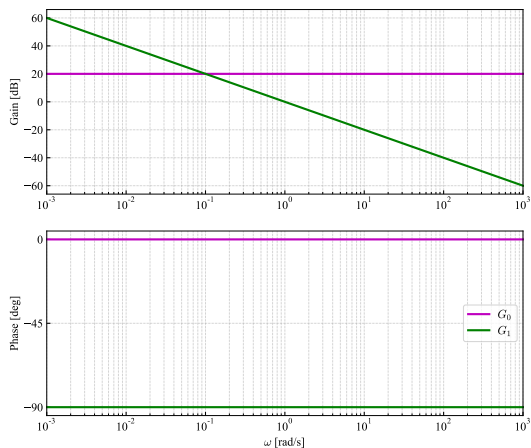
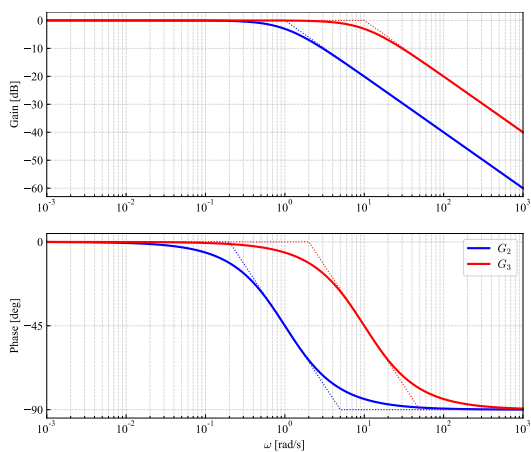
【 6 】 (Bode 線図とベクトル軌跡)

$\mathcal{G}(s)$ をいくつかの要素の直列結合に分解して

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_0(s)\mathcal{G}_1(s)\mathcal{G}_2(s)\mathcal{G}_3(s)$$

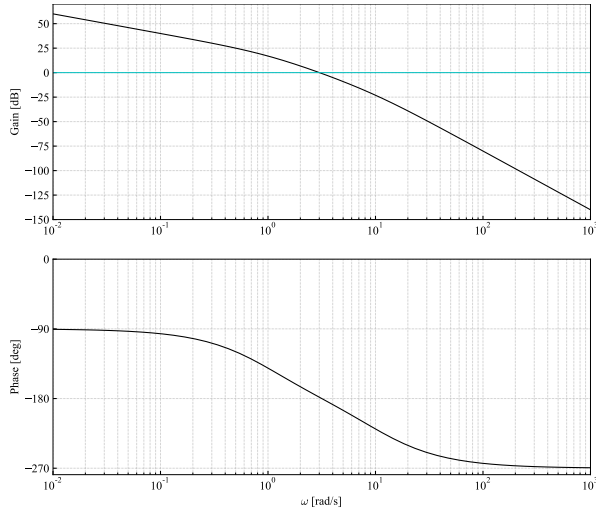
$$\mathcal{G}_0(s) = 10, \mathcal{G}_1(s) = \frac{1}{s}, \mathcal{G}_2(s) = \frac{1}{s+1}, \mathcal{G}_3(s) = \frac{10}{s+10}$$

とする。それぞれの要素の Bode 線図は以下ようになる。

解図 3.7: $G_0(s), G_1(s)$ の Bode 線図解図 3.8: $G_2(s), G_3(s)$ の Bode 線図

これらを重ね合わせることで $G(s)$ の Bode 線図が描ける。

積分器を含むため、ベクトル軌跡における $\omega \rightarrow 0$ のときの漸近特性を把握するには、 $G(j\omega)$ の実部と虚部の挙動を調べておく必要がある。

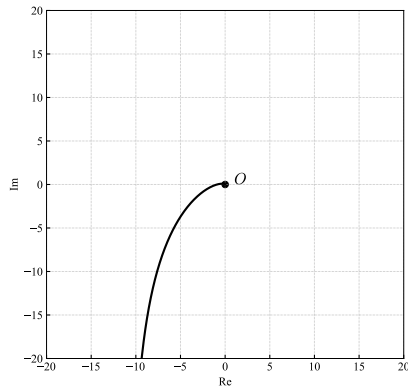


解図 3.9: $G(s)$ の Bode 線図

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[\mathcal{G}(j\omega)] = -11, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}[\mathcal{G}(j\omega)] = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \rightarrow -\infty$$

$$\mathcal{G}(j\omega) = \frac{100}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 100)} = -\frac{100(11\omega + (1 - \omega^2)j)}{\omega(1 + \omega^2)(100 + \omega^2)}$$

ベクトル軌跡の概形は以下のとおり。



解図 3.10: $G(s)$ のベクトル軌跡

[トップへ戻る](#)

4 章

【1】 (可制御性グラム行列と到達入力)

式 (4.5) の入力 $u(t)$ を与えた時の $\mathbf{x}(T)$ を確認する。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(T) &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 - \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \\
 &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 - e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top e^{-\mathbf{A}^\top \tau} G_c^{-1}(T) (\mathbf{x}_0 - e^{-\mathbf{A}T} \mathbf{x}_f) d\tau \\
 &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 - e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top e^{-\mathbf{A}^\top \tau} d\tau \cdot G_c^{-1}(T) (\mathbf{x}_0 - e^{-\mathbf{A}T} \mathbf{x}_f) \\
 &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 - e^{\mathbf{A}T} G_c(T) G_c^{-1}(T) (\mathbf{x}_0 - e^{-\mathbf{A}T} \mathbf{x}_f) \\
 &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 - e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_f \\
 &= \mathbf{x}_f
 \end{aligned}$$

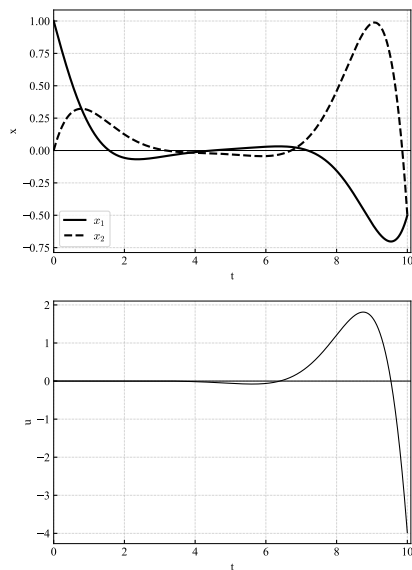
参考までに、下記の 3 章の問題【4】で用いたシステム

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の場合の計算例を示そう。このシステムは

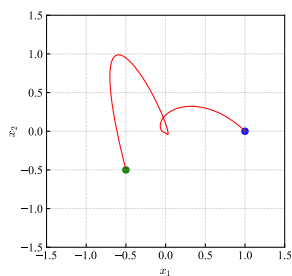
$$\mathbf{V}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

が正則なので可制御である。可制御性グラム行列 $G_c(T)$ を求め、これを用いて計算した制御入力 (4.5) を与えた結果を下図に示す。ここでは $T = 10$, $\mathbf{x}_0 = [1, 0]^\top$, $\mathbf{x}_f = [-0.5, -0.5]^\top$ としている。



解図 4.1: $\mathbf{x}_0 = [1, 0]^\top$ から $\mathbf{x}_f = [-0.5, -0.5]^\top$ への到達

状態空間での軌跡は以下のとおり。



解図 4.2: $\mathbf{x}_0 = [1, 0]^\top$ から $\mathbf{x}_f = [-0.5, -0.5]^\top$ への到達

【 2 】 2 章 【3】 の問題で求めた通り。

【3】（正準分解の導出）

まず可制御性と可観測性を調べる。

$$\mathbf{V}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、 $\text{rank } \mathbf{V}_c = 1$, $\text{rank } \mathbf{V}_o = 2$ であるからシステムは不可制御かつ不可観測である。さらに部分空間の構造を調べると

$$\text{Im } \mathbf{V}_c = \text{Ker } \mathbf{V}_o = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

となり、1次元の可制御部分空間の基底と不可観測部分空間の基底が共通している。したがって

$$n_{c\bar{o}} = 1, n_{co} = 0, n_{\bar{c}\bar{o}} = 0, n_{\bar{c}o} = 2$$

であり、1次元の可制御・不可観測な部分空間と2次元の不可制御・可観測な部分空間に分解されることになる。変換行列として

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

をとって等価変換すると、

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と正準分解される。

【4】（座標変換による伝達関数の不変性）

$$\mathbf{Q} := \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{sI} - \mathbf{TAT}^{-1})^{-1}\mathbf{T}$$

とおくと、その逆行列は

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{sI} - \mathbf{TAT}^{-1})\mathbf{T} = \mathbf{sI} - \mathbf{A}$$

であるので、 \mathbf{Q} は $(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}$ に等しいことがわかる。したがって

$$\begin{aligned}\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} &= CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB = CQB \\ &= C(sI - A)^{-1}B\end{aligned}$$

【5】 (座標変換による伝達関数の不変性：具体例)

(1) u から y までの伝達関数

$$\mathcal{G}_{yu}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+3}{s^2+5s+4}$$

(2) 状態方程式への変換

$$\begin{aligned}\bar{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= CT^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(3) 伝達関数への再変換

$$\mathcal{G}_{yu}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = \frac{s+3}{s^2+5s+4}$$

となり、(1) の結果と一致する。

【6】 有限時刻までの出力から初期値が一意に決定するための必要十分条件は、システムが可観測であることである。可観測性行列は、

$$\mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+a \end{bmatrix}$$

であるので、 $1+a \neq 0$ 、すなわち、 $a \neq -1$ のとき可観測 ($\det \mathbf{V}_o \neq 0$) である。一方、 $y(0) = 2+a$ 、 $\dot{y}(0) = a(1+a)$ である。そして、

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{V}_o \mathbf{x}(0)$$

であるので、 $a \neq -1$ を満たすとき (可観測であるとき)、

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{V}_o^{-1} \begin{bmatrix} 2+a \\ a(1+a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ a \end{bmatrix}$$

を得る。【別解】後半部分は、 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ の解 (行列指数関数) を求めて、 $y(t)$ を

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \left[1 \quad \frac{1+a}{a}e^{at} - \frac{1}{a} \right] \mathbf{x}(0)$$

としてから、係数比較をしても良い。

[トップへ戻る](#)

5 章

【1】 (Routh-Hurwitz の方法による安定判別)

まず、分母多項式の係数はすべて正なので、条件 1 は満たしている。つぎに、Routh 表を作成する。

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 3 & 5 \\
 s^3 & 2 & 4 & 0 \\
 s^2 & b_1 := \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{2} = 1 & b_2 := \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{2} = 5 & b_3 = 0 \\
 s^1 & c_1 := \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{1} = -6 & c_2 := \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{1} = 0 & c_3 = 0 \\
 s^0 & d_1 := \frac{-6 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{-6} = 5 & d_2 := \frac{-6 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{-6} = 0 & d_3 = 0
 \end{array}$$

Routh 数列は、1, 2, 1, -6, 5 となり、条件 2 は満たされない。これより、システムは不安定である。また、Routh 数列の符号が 2 回変わっているの、不安定極は 2 個である。

同様に、Hurwitz 行列を確認すると、

$$|H_1| = a_1 = 4$$

$$|H_2| = -a_0 a_3 + a_1 a_2 = 2$$

$$|H_3| = -a_0 a_3^2 - a_1^2 + a_1 a_2 a_3 = -12$$

$$|H_4| = -a_0 a_3^2 - a_1^2 + a_1 a_2 a_3 = -12$$

となり、正でないものを含むため不安定である。

【2】 (Lyapunov の方法による内部安定性判別)

Lyapunov 方程式

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{O}$$

を \mathbf{P} について解く。その際、 \mathbf{P} は対称かつ正定行列であるので、 $p, q, r \in \mathbb{R}$ を変数として

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$$

とおき、 $p > 0, pr - q^2 > 0$ を満たす解を求める。Lyapunov 方程式より

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -4p + 4q + 1 & p - 5q + 2r \\ p - 5q + 24 & 2q - 6r + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これを解いて $p = 17/40, q = 7/40, r = 9/40$ を得る。 $p > 0$ かつ $pr - q^2 = 104/40^2 > 0$ より \mathbf{P} は正定、よって \mathbf{A} は安定行列である。

【3】 (フィードバック系の内部安定性)

$$\mathcal{K}(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{P}(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-2)}$$

であり、 $\mathcal{K}(s)$ と $\mathcal{P}(s)$ の間で不安定極 2 の相殺が起きている。したがって、この $\mathcal{K}(s)$ と $\mathcal{P}(s)$ でフィードバック系を構成した場合、 r から y までの伝達関数

$$\mathcal{G}_{yr}(s) = \frac{s-1}{s^2 + 4s + 1}$$

は入出力安定であるにも関わらず、フィードバック系は内部不安定となっている。

実際、その他の信号間の伝達特性をみると、たとえば

$$\mathcal{G}_{yd} = \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s^2 + 4s + 1)}$$

は不安定である。また、フィードバック系の特性多項式

$$\phi_{\text{FB}} = (s-2)(s+1)(s^2 + 4s + 1)$$

にも不安定根 2 が表れている。

【4】 (Nyquist の安定判別 (安定系))

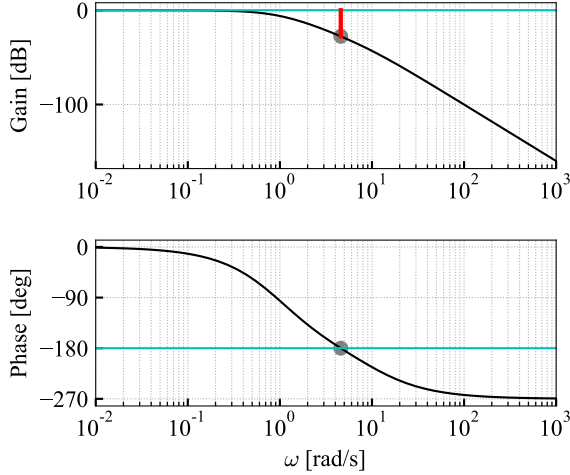
(1) r から y までの伝達関数 $\mathcal{G}(s)$ は

$$\mathcal{G}(s) = \frac{10k}{s^3 + 12s^2 + 21s + 10(1+k)}$$

(2) $\mathcal{P}(s)$ を因数分解すると

$$\mathcal{P}(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s+10)}$$

であるので、その Bode 線図は 1 次系の Bode 線図の足し合わせとして描くことができる。

解図 5.1: $\mathcal{P}(s)$ の Bode 線図

ゲイン余裕 GM は以下のようにして求められる。 $\mathcal{P}(j\omega)$ を解析すると

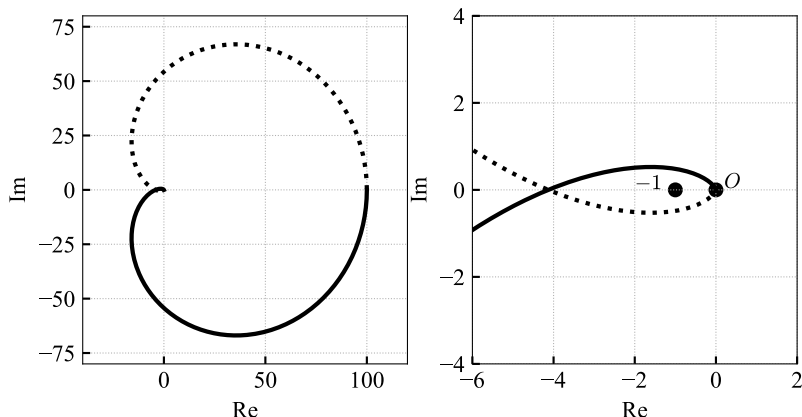
$$\begin{aligned}\mathcal{P}(j\omega) &= \frac{10}{(10 - 12\omega^2) + (21 - \omega^2)\omega j} \\ &= 10 \frac{(10 - 12\omega^2) - (21 - \omega^2)\omega j}{(10 - 12\omega^2)^2 + (21 - \omega^2)^2\omega^2}\end{aligned}$$

位相交差角周波数は、虚部が 0 となる条件から $\omega_{pc} = \sqrt{21}\text{rad/s}$ と求められる。このときのゲインは

$$|\mathcal{P}(j\omega_{pc})| = \frac{10}{\sqrt{(\omega_{pc}^2 + 1)^2(\omega_{pc}^2 + 10^2)}} = \frac{10}{22 \times \sqrt{121}} = \frac{1}{24.2}$$

であり、ここからゲイン余裕は $GM = -20 \log_{10} 24.2 \approx 27.7\text{dB}$ である。

- (3) $k = 100$ のときの $k\mathcal{P}(s)$ の Nyquist 軌跡は下図のとおり（左は全体図，右は拡大図）。Nyquist 軌跡は実軸上の点 -1 を時計回りに 2 回囲んでいる ($N = -2$)。 $k\mathcal{P}(s)$ は安定であるから $\Pi = 0$ ，したがって定理 5.10 より $Z = \Pi - N = 2$ であり，フィードバック系は不安定である（不安定極を 2 つ持つ）。



解図 5.2: Nyquist 軌跡 (右は拡大図)

- (4) (1) で求めた伝達関数 $G(s)$ に Routh または Hurwitz の安定判別法 (p.61 の条件 (3)) を適用すると, 安定性の必要十分条件は

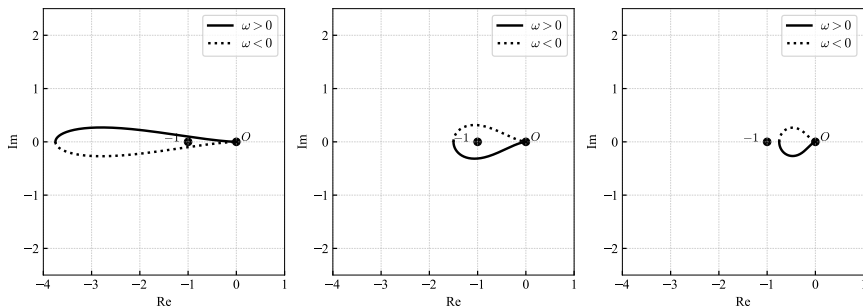
$$1 + k > 0, \quad 12 \cdot 21 > 10(1 + k)$$

であるので, $k > 0$ を考慮すると $0 < k < 24.2$, すなわち 24.2 がゲインの上限となる。

(3) で描いた $k = 100$ の Nyquist 軌跡はこの条件を満たさない, すなわち不安定な場合であった。また (2) の GM 導出時に求めたとおり, $k = 24.2$ のときにちょうど Nyquist 軌跡が点 -1 を通る。 $k < 24.2$ のときには右側を通るので $N = 0$, したがって定理 5.10 より $Z = \Pi - N = 0$ となり, フィードバック系は安定である。このように, どちらの安定判別法も同じ結論を導く。

【5】 (Nyquist の安定判別 (不安定系))

$P(s)$ は不安定極 1 をもつので $\Pi = 1$ である。したがって, フィードバック系が内部安定 ($Z = 0$) となるための必要十分条件は $N = \Pi$, つまり Nyquist 軌跡が点 -1 を反時計回りに 1 回囲むことである。 $a = 0.8, a = 2, a = 3$ の場合の $P(s)K(s)$ の Nyquist 軌跡の概形を下图に示す。



解図 5.3: Nyquist 軌跡

$\omega = 0$ の時に点 $-a$ を通り, $\omega \rightarrow \pm\infty$ の時に原点に収束することに注意されたい。したがって $a = 0.8$ のときは時計回りの閉曲線, ($a = 1$ のときに曲線がつぶれて裏返り) $a = 2, 3$ のときには反時計回りとなる。つまり $a = 0.8$ のときは $N = -1$ (不安定), $a = 2$ のときは $N = 1$ (安定), $a = 3$ のときは $N = 0$ (不安定) である。なお,

$$\frac{\mathcal{P}(s)\mathcal{K}(s)}{1 + \mathcal{P}(s)\mathcal{K}(s)} = \frac{3}{s^2 + (a-1)s + (3-a)}$$

を Routh-Hurwitz の方法で調べれば, 安定性の必要十分条件は $1 < a < 3$ であることがわかる。

[トップへ戻る](#)

6 章

【1】 (1) ステップ応答 $y(t)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} y(t) &= K \left(1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \bar{\omega}_n t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \bar{\omega}_n t \right) \\ &= K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\bar{\omega}_n t + \theta) \right), \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \end{aligned}$$

となる。ただし, $\bar{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ である。その時間微分は

$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \bar{\omega}_n t$$

であるので, これが 0 となるのは, $t = n\pi/\bar{\omega}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ のときであることがわかる。これより, 行き過ぎ時間 $t_p > 0$ は

$$t_p = \frac{\pi}{\bar{\omega}_n} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

となる。したがって、最大行き過ぎ量は

$$A_{\max} = y(t_p) - y_{\infty} = K \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$$

となる。

- (2) ステップ応答の振動成分の包絡線は

$$K \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\right)$$

である。これが $1.05K$ となる t を整正時間の近似値とする。計算とすると、

$$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln\left(\frac{20}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \simeq \frac{\ln 20}{\zeta\omega_n} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

を得る。同様に、2%整定時間は、 $t_s \simeq \ln 50 / (\zeta\omega_n) \simeq 4 / (\zeta\omega_n)$ となる。

- (3) $y(t) = K$ とすると

$$-\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \tan \bar{\omega}_n t$$

となる。これより、

$$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right)$$

を得る。

- 【2】ピークゲインは、 $|\mathcal{P}(j\omega)|$ を計算し、その分母が最小となる周波数 ω_p でのゲインを計算すればよい。

$$|\mathcal{P}(j\omega)| = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

である。したがって、 $(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2$ が最小となる $\omega > 0$ は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega}(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2 &= -4\omega(\omega_n^2 - \omega^2) + 8\zeta^2\omega_n^2\omega \\ &= 4\omega(\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)) = 0 \end{aligned}$$

の根を求めて、 $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ となる。そして、

$$\begin{aligned}
M_p = |\mathcal{P}(j\omega_p)| &= \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2))^2 + (2\zeta\omega_n^2\sqrt{1 - 2\zeta^2})^2}} \\
&= \frac{K}{\sqrt{(1 - (1 - 2\zeta^2))^2 + 4\zeta^2(1 - 2\zeta^2)}} \\
&= \frac{K}{\sqrt{4\zeta^2(\zeta^2 + 1 - 2\zeta^2)}} \\
&= \frac{K}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}
\end{aligned}$$

が得られる。

【3】

$$t_p\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

と

$$\ln\left(\frac{A_{\max}}{K}\right) = -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

より,

$$\zeta\omega_n = -\frac{1}{t_p} \ln\left(\frac{A_{\max}}{K}\right)$$

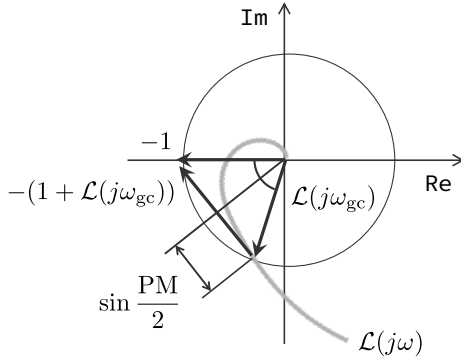
が得られる。なお、 $\zeta\omega_n$ は極の実部の大きさである。つまり、2次遅れ系のステップ応答を観測し、その観測データから A_{\max} , t_p , K を読み取ることで、極の位置を知ることができる。さらに、

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{\pi}{t_p}\right)^2 + (\zeta\omega_n)^2}, \quad \zeta = \frac{(\zeta\omega_n)}{\omega_n}$$

より、 ω_n と ζ を A_{\max} , K , t_p で表すこともできる。この作業は、パラメータ同定と呼ばれる。

- 【4】 1次遅れ系のステップ応答は、 $y(t) = 1 - e^{-t/T}$ である。これより、 $y(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$, $y(2T) = 1 - e^{-2} = 0.864$, $y(3T) = 1 - e^{-3} = 0.950$, $y(4T) = 1 - e^{-4} = 0.981$ となる。つまり、 $t = 3T$ が5%整定時間、 $t = 4T$ が2%整定時間である。

- 【5】 解図 6.1 を考え、ベクトル $-1 + j0$ と $\mathcal{L}(j\omega_{gc})$ の差が $-(1 + \mathcal{L}(j\omega_{gc}))$ となることと、それらのベクトルのなす角が PM であることから、式 (6.3) が得られる。



解図 6.1: 位相余裕と還送差 $1 + \mathcal{L}(s)$ の関係

- 【6】 $\ddot{e}(t) = -\ddot{y}(t) = 2\zeta\dot{y}(t) + y(t) - r(t) = -2\zeta\dot{e}(t) - e(t)$ であるので、 $\ddot{e}(t) + 2\zeta\dot{e}(t) + e(t) = 0$ となる。また、初期条件は、 $e(0) = 1$ 、 $\dot{e}(0) = 0$ を得る。これより、

$$e(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

となる。ただし、 $\lambda_1, \lambda_2 = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$ である。さらに、初期条件より、関係式 $K_1 + K_2 = 1$ 、 $K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 = 0$ が得られる。ここで、評価関数の値は、 $e(t)$ を代入して、積分すると

$$J = \int_0^\infty e(t)^2 dt = -\frac{K_1^2}{2\lambda_1} - \frac{2K_1 K_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{K_2^2}{2\lambda_2}$$

となる。 $K_1, K_2, \lambda_1, \lambda_2$ を消去して整理すると、

$$J = \zeta + \frac{1}{4\zeta}$$

となるので、 $dJ/d\zeta = 0$ となる ζ が $\zeta = 1/2$ と求まる ($d^2J/d\zeta^2 > 0$)。さらに、 $\zeta = 1/2$ のときの評価関数の値は、 $J = 1$ である。

【別解】 Lyapunov 方程式 $\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} = -\mathbf{C}^\top \mathbf{C}$ を利用して求めることができる。 $\mathbf{x} := [e \ \dot{e}]^\top$ とすると

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0]$$

となる。このとき、

$$J = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt = \mathbf{x}(0)^{\top} \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

となる。なぜなら、被積分関数は、 $e(t)^2 = \mathbf{x}(t)^{\top} \mathbf{C}^{\top} \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$ であるので、 $\mathbf{C}^{\top} \mathbf{C} = -\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\top} \mathbf{P}$ を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^{\top} \mathbf{C}^{\top} \mathbf{C} \mathbf{x}(t) dt &= - \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^{\top} (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\top} \mathbf{P}) \mathbf{x}(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^{\top} \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t)^{\top} \mathbf{P} \mathbf{x}(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \{ \mathbf{x}(t)^{\top} \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \} dt \\ &= -\mathbf{x}(\infty)^{\top} \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}(0)^{\top} \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

となるからである。なお、 \mathbf{A} は安定行列なので、 $\mathbf{x}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ であることに注意する。さて、上記の Lyapunov 方程式を解くと、

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1}{4\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4\zeta} \end{bmatrix}$$

が得られる。そして、 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^{\top}$ であるので、 $J = \mathbf{x}(0)^{\top} \mathbf{P} \mathbf{x}(0) = \zeta + 1/4\zeta$ となる。さらに、 $\partial J / \partial \zeta = 0$ となる ζ は、 $\zeta = 1/2$ であり、そのときの J は、 $J = 1$ となる。

[トップへ戻る](#)

7 章

- 【1】 特性多項式は、 $Ts^3 + s^2 + Kks + K$ である。Routh-Hurwitz の安定判別法より、 $k > T$ を得る。
- 【2】 フィードバック制御系は

$$G_{yr} = \frac{10k(s+4)}{s^3 + 3s^2 + (2+10k)s + 40k}$$

である。 $k = 0$ のときは、 $G_{yr} = 0$ となる。さらに、特性多項式は $s^3 + 3s^2 + (2+10k)s + 40k$ であるので、Routh-Hurwitz の安定判別法より $0.6 > k > 0$ となる。つまり、 $k = 0.6$ のとき安定限界となる。つぎに、 $k = 0.6$ のとき、 $s^3 + 3s^2 + 8s + 24 = (s^2 + 8)(s + 3)$ であるので、 $s = -3, \pm 2\sqrt{2}i$ が閉ループ極である。

【3】 閉ループ系は

$$\mathcal{G}_{yr}(s) = \frac{\mathcal{P}(s) \left(k_P + \frac{k_I}{s} \right)}{1 + \mathcal{P}(s) \left(k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s \right)} = \frac{b_0 k_P s + b_0 k_I}{s^3 + (b_0 k_D + a_1) s^2 + (a_0 + b_0 k_P) s + b_0 k_I}$$

である。これより, $1/\mathcal{G}_{yr}(s)$ は,

$$1 + \frac{a_0 s}{b_0 k_I} + \left(-\frac{a_0 k_P}{b_0 k_I^2} + \frac{a_1}{b_0 k_I} + \frac{k_D}{k_I} \right) s^2 + \left(\frac{a_0 k_P^2}{b_0 k_I^3} - \frac{a_1 k_P}{b_0 k_I^2} - \frac{k_D k_P}{k_I} + \frac{1}{b_0 k_I} \right) s^3 + O(s^4)$$

となるので, 3 次の項まで一致させると

$$k_P = \frac{\omega_n^2}{b_0}, \quad k_I = \frac{a_0 \omega_n}{2b_0 \zeta}, \quad k_D = \frac{a_0}{2b_0 \omega_n \zeta} - \frac{a_1}{b_0} + \frac{2\omega_n \zeta}{b_0}$$

が得られる。

【4】 特性多項式は, $\phi(s) = s^3 + 4s^2 + (3+3k)s + 3$ となる。この根の実部がすべて -1 未満になること確認するためには, $t = s + 1$ とおき, $\phi(t-1)$ が安定多項式であることを Routh-Hurwitz の安定判別法で確認すればよい。実際, $\phi(t-1) = t^3 + t^2 + (3k-2)t + (3-3k)$ となるので, $5/6 < k < 1$ が得られる。一方, $k = 1$ の場合, 安定な極零相殺が生じるので, $\phi(s) = s^2 + 3s + 3k$ となる。この場合, $k > 0$ であれば, 特性多項式の根の実部は -1.5 となるため, $k = 1$ でも良い。したがって, $5/6 < k \leq 1$ を得る。

【5】 (1) 特性多項式は, $\phi(s) = s^3 + 2s^2 + (k_1 + 4)s + k_0$ となる。Routh-Hurwitz の安定判別法より,

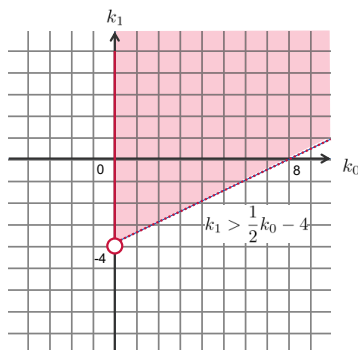
$$k_0 > 0, \quad k_1 > -4, \quad 8 + 2k_1 - k_0 > 0 \rightarrow k_1 > \frac{1}{2}k_0 - 4$$

を得る。ところで, $k_0 = 0$ のときは, $K(s) = k_1$ であるので, $\phi(s) = s^2 + 2s + (k_1 + 4)$ となる。したがって, $k_1 > -4$ であれば内部安定である。これより, 解図 7.1(a) を得る。

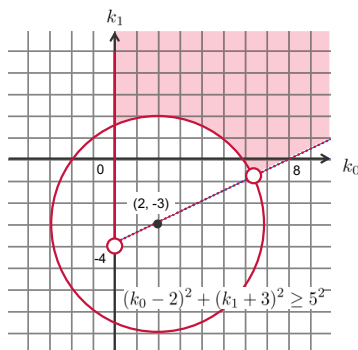
(2) まず, 目標値 r から偏差 e への伝達関数は,

$$\mathcal{G}_{er}(s) = \frac{1}{1 + \mathcal{L}(s)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 4s}{s^3 + 2s^2 + (k_1 + 4)s + k_0}$$

である。定常偏差は, $e(t) = |\mathcal{G}_{er}(j)| \cos(t + \angle \mathcal{G}_{er}(j))$ である。 $|e(t)| \leq |\mathcal{G}_{er}(j)| \leq \sqrt{13}/3$ より, $3^2 \leq (k_0 - 2)^2 + (k_1 + 3)^2$ を得る。これは, 中心が $(2, -3)$ 半径が 3 の円の外側を表している。これと (1) の結果 (内部安定性) を合わせて得られる解図 7.1(b) の領域が解となる。



(a) (1) の解答



(b) (2) の解答

解図 7.1: 条件を満たすゲインの範囲

[トップへ戻る](#)

8 章

【1】

$$\mathbf{A} + \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} -3 + 2f_1 & 1 + 2f_2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

であるので、特性多項式は $(s+3-2f_1)(s+2)-2(1+2f_2) = s^2 + (5-2f_1)s + 4(1-f_1-f_2) = 0$ である。一方、 $(s+4-4j)(s+4+4j) = s^2 + 8s + 32 = 0$ である。これより、 $\mathbf{F} = [-1.5 \quad -5.5]$ を得る。

【2】

$$\mathbf{A} + \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ f_1 & 1+f_2 & f_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

より、 $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$ の特性多項式は、 $s^3 + (-f_2 - 4)s^2 + (5 - f_1 + 3f_2)s - 2 + f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$ となる。一方、目標とする特性多項式は、 $(s+3)^3 = s^3 + 9s^2 + 27s + 27 = 0$ である。したがって、 $\mathbf{F} = [-61 \quad -13 \quad -64]$ となる。

【3】

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 - f_1 & -f_2 \\ 2 + f_1 & 1 + f_2 \end{bmatrix}$$

より, $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}$ の特性多項式は, $(s - 1 + f_1)(s - 1 - f_2) + 2f_2 + f_1f_2 = s^2 + (f_1 - f_2 - 2)s + 1 - f_1 + 3f_2 = 0$ となる。一方, 目標とする特性多項式は, $s^2 + 4s + 5 = 0$ である。したがって,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

より, $\mathbf{F} = [11 \ 5]$ となる。

【4】 (1) 伝達関数より, $\dot{x}_1 = -x_1 + 5u$, $\dot{x}_2 = 2x_1$, $\dot{x}_3 = 2x_2 - 2x_3$ なので,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

(2) $\mathbf{A} + \mathbf{B}[f_1 \ f_2 \ f_3]$ の特性多項式は, $s^3 + (3 - 5f_1)s^2 + (2 - 10f_1 - 10f_2)s + 20(f_3 - f_2)$ である。一方, $(s + 1)(s + 2)(s + 3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$ である。これより, $f_1 = -0.6$, $f_2 = -0.3$, $f_3 = 0$ を得る。

【5】 $\mathbf{F} = [-10 - a \quad -16 - b \quad -7 - c]$

【6】 (1) $\mathbf{F} = [-15 \ -5]$

(2) 制御則を施すと, $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathbf{F})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2d(t)$ となる。これより, $y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathbf{F}))^{-1}\mathbf{B}_2d(s)$ となる。 $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathbf{F}))^{-1}\mathbf{B}_2 \equiv 0$ であればよい。ここで,

$$(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathbf{F}))^{-1} = \frac{1}{s(s + 1 - f_2) - a - f_1} \begin{bmatrix} s + 1 - f_2 & 1 \\ a + f_1 & s \end{bmatrix}$$

であるので,

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathbf{F}))^{-1}\mathbf{B}_2 = \frac{2f_2 - a - f_1 + 2}{s(s + 1 - f_2) - a - f_1} = 0$$

を満たす \mathbf{F} を求めればよい。たとえば, $2f_2 - a - f_1 + 2 = 0$ となるものとして, $\mathbf{F} = [-a \ -1]$ とする。なおこの場合, 閉ループ系の極は $0, -2$ となる (安定限界)。

【別解】 関係式

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{s^{i+1}}$$

が成り立つことを利用すると, $C(A + B_1 F)^i B_2 = 0$ ($i = 0, 1, \dots, \infty$) を満たす F が求まればよいことがわかる。 $CB_2 = 0$ なので, $CA + CB_1 F = 0$ となる F があれば, 上記の条件を満たす。したがって, たとえば, $F = -(CB_1)^{-1}CA = [-a \quad -1]$ とすればよい。

【7】 $u(t) = Fx(t) = [f_1 \ f_2]x(t)$ を施すと,

$$A + BF = \begin{bmatrix} 2f_1 & -2 + 2f_2 \\ 1 + f_1 & -3 + f_2 \end{bmatrix}$$

となる。このとき, 特性多項式は, $(s+2)((s+1) - 2f_1 - f_2) = 0$ であり, これより, -2 が不可制御極であることがわかる。したがって, 可制御極は, -1 である。

(別解) A の固有値は, $-1, -2$ である。可制御性ペンシル

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 2 & 2 \\ -1 & s+3 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える。 $s = -1$ のときランクが 2 で, $s = -2$ のときランクが 1 である。したがって, $s = -2$ は不可制御極, $s = 1$ は可制御極である。

[トップへ戻る](#)

9 章

【1】 Riccati 方程式は, $A = -2$, $B = 1$, $Q = 1/2$, $R = 1/2$ より, $-2P^2 - 4P + \frac{1}{2} = 0$ となる。これを解くと, $P = (-2 \pm \sqrt{5})/2$ となるが, $P > 0$ であるので, $P = (-2 + \sqrt{5})/2$ となる。したがって, 制御入力 $u(t) = (2 - \sqrt{5})x(t)$ となる。なお, 式 (9.23) の $p(t)$ において, $T \rightarrow \infty$ とし, $p(0)$ を計算する[†]と, $p(0) = (1/2)(1/(2 + \sqrt{5})) = (-2 + \sqrt{5})/2$ となる。これが上記の P と対応していることがわかる。

【2】 $\dot{p} = 2p^2 + 4p - 1/2$ を解く。右辺を $2(p - \alpha)(p - \beta)$ とする。ただし, $\alpha = (-2 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (-2 - \sqrt{5})/2$ である。微分方程式

$$2 = \frac{\dot{p}}{(p - \alpha)(p - \beta)} = \frac{1}{(\alpha - \beta)} \left(\frac{\dot{p}}{p - \alpha} - \frac{\dot{p}}{p - \beta} \right)$$

[†] 任意の時刻 t に対して, $p_{\infty}(t) := \lim_{T \rightarrow \infty} p(t)$ が存在する。そして, $p_{\infty}(t)$ は定数となり, $p_{\infty}(t) = p_{\infty}(0)$ であることが導ける。

と変形し、両辺を t で積分する。すると、

$$\ln \left| \frac{p - \alpha}{p - \beta} \right| = 2(\alpha - \beta)t + C_0$$

となり、整理すれば、

$$p(t) = \frac{\alpha - \beta C e^{2(\alpha - \beta)t}}{1 - C e^{2(\alpha - \beta)t}}$$

が得られる。一方、 $p(T) = 0$ より、 $C = (\alpha/\beta)e^{-2(\alpha - \beta)T}$ である。これらより、

$$p(t) = \frac{\alpha\beta - \alpha\beta e^{2(\alpha - \beta)(t - T)}}{\beta - \alpha e^{2(\alpha - \beta)(t - T)}}$$

となるので、 α, β に値を代入すれば、式 (9.23) が得られる。

【3】 まず、安定性を確認する。関係式

$$-PBR^{-1}B^{\top}P = PBF_{\text{opt}} + F_{\text{opt}}^{\top}B^{\top}P + F_{\text{opt}}^{\top}RF_{\text{opt}}$$

を Riccati 方程式に代入して整理すると、

$$P(A + BF_{\text{opt}}) + (A + BF_{\text{opt}})^{\top}P = -\left(F_{\text{opt}}^{\top}RF_{\text{opt}} + Q\right)$$

が得られる。ここで、 $A_{\text{cl}} = A + BF_{\text{opt}}$ 、 $Q_{\text{cl}} = F_{\text{opt}}^{\top}RF_{\text{opt}} + Q$ とおくと、 $PA_{\text{cl}} + A_{\text{cl}}^{\top}P = -Q_{\text{cl}}$ となる。これは、Lyapunov 方程式である。また、 $Q \succ 0$ および $R \succ 0$ より、 $Q_{\text{cl}} \succ 0$ である。したがって、Lyapunov の安定定理より、 A_{cl} は安定であるので、閉ループ系が安定であることがわかる。

つぎに、最適性を確認する。 $\eta := u + R^{-1}B^{\top}P\mathbf{x}$ とおくと、 $\eta = 0$ のとき、 $u = -R^{-1}B^{\top}P\mathbf{x}$ となる。したがって、 $\eta = 0$ のとき、 J が最小になることを確認すればよい。評価関数 J に Riccati 方程式を代入して Q を消去すると、

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \mathbf{x}^{\top} \left(PBR^{-1}B^{\top}P - (PA + A^{\top}P) \right) \mathbf{x} + Ru^2 \right\} dt$$

となる。さらに、整理していくと、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \left\{ R\eta^2 - \mathbf{x}^{\top}P(A\mathbf{x} + Bu) - (\mathbf{x}^{\top}A^{\top} + u^{\top}B^{\top})P\mathbf{x} \right\} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ R\eta^2 - (\mathbf{x}^{\top}P\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^{\top}P\mathbf{x}) \right\} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ R\eta^2 - \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^{\top}P\mathbf{x}) \right\} dt \end{aligned}$$

となる。ここで、閉ループ系は漸近安定 ($\mathbf{x}(\infty) = 0$) であるので、

$$J = \int_0^{\infty} R\eta^2 dt + \mathbf{x}(0)^{\top} \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

を得る。第一項の被積分関数は、すべての η に対して、0 以上の値となるので、 $\eta = 0$ のときに J が最小となることがわかる。

【4】 (1) Riccati 方程式の正定対称解は、

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

なので、フィードバックゲインは、 $\mathbf{F} = [-3 \quad -4]$ となる。

(2) 一巡伝達関数は、

$$\mathcal{L}(s) = -\mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{4s+3}{s^2-s-1}$$

となる。つぎに、 $|1 + \mathcal{L}(j\omega)| \geq 1$ を計算すると $\omega^2 \geq -1/2$ が得られる。これより、任意の周波数 $\omega > 0$ に対して $|1 + \mathcal{L}(j\omega)| \geq 1$ が成り立つことがわかる。

【5】 (1) Riccati 方程式の解は、

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{q+a^2}-a & 0 \\ 0 & \sqrt{q+a^2}-a \end{bmatrix}$$

である。これより、 $\mathbf{F} = [0 \quad a - \sqrt{q+a^2}]$ が得られる。

(2) 開ループ極は、 $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s(s+a)+1$ より、 $s = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$ である。一方、閉ループ極は $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})| = s^2 + \sqrt{q+a^2}s + 1$ より、

$$s = -\frac{\sqrt{q+a^2}}{2} \pm \sqrt{\frac{q+a^2}{4}-1} \quad (1)$$

であるので、 $q \rightarrow 0$ のとき、

$$s = -\frac{|a|}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-1} \quad (2)$$

となる。これより、 $a \geq 0$ のとき、閉ループ極は開ループ極に収束する。 $a < 0$ のとき、閉ループ極は、開ループ極と虚軸に対して対象な位置に収束する。

- 【6】新しい状態 $\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{at}\mathbf{x}(t)$ と新しい入力 $\tilde{u}(t) = e^{at}u(t)$ を定義すると、 $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + a\mathbf{I})\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{u}(t)$ となる。そして、評価関数は、

$$J = \int_0^\infty \tilde{\mathbf{x}}(t)^\top \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(t) + R\tilde{u}(t)^2 dt \quad (3)$$

となる。これより、 $\tilde{u}(t) = -R^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}(t)$ を得る。ただし、 \mathbf{M} は、

$$(\mathbf{A} + a\mathbf{I})^\top \mathbf{M} + \mathbf{M}(a\mathbf{I} + \mathbf{A}) - \mathbf{M}\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{M} + \mathbf{Q} = \mathbf{O} \quad (4)$$

の解である。以上より、 $u(t) = -R^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(t)$ を得る。

- 【7】任意の正則な行列 $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ に対して、 $\mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{T}^{-1}$ は \mathbf{H} と同じ固有値 λ をもつ。さらに、

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

で定義される正則な行列 \mathbf{T} に対しては、

$$\mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^\top & \mathbf{Q} \\ \mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^\top & \mathbf{A} \end{bmatrix} = -\mathbf{H}^\top$$

が成り立つ。 $-\mathbf{H}^\top$ と $-\mathbf{H}$ は同じ固有値をもつことから、 $\mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{T}^{-1}$ は、 $-\mathbf{H}$ と同じ固有値 $-\lambda$ をもつ。これより、 \mathbf{H} が、 λ と $-\lambda$ を固有値にもつことがわかる（したがって、 \mathbf{H} の固有値のうち、安定なものは n 個しかない）。

- 【8】 $\mathbf{z}^\top \mathbf{z} + u^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + Ru^2$ とかくと、

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, R = 1$$

である。これより、Riccati 方程式の解は、

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 1 \\ 1 & \sqrt{11} \end{bmatrix}$$

となる。したがって、 $\mathbf{F} = -R^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P} = -[1 \ \sqrt{11}]$ が得られる。また、閉ループ極は、 $(-\sqrt{11} \pm \sqrt{7})/2$ である。

- 【9】(1) $\mathbf{Q} = \mathbf{O}$ のときの Hamilton 行列 \mathbf{H} の固有値は、 \mathbf{A} の不安定固有値 $\lambda_i > 0$ と、不安定固有値 $\lambda_i > 0$ を虚軸に対称に折り返したものである。したがって、閉ループ極は、不安定固有値 $\lambda_i > 0$ を虚軸に対称に折り返した安定固有値 $-\lambda_i$ となる。

- (2) $\mathbf{A} + \nu \mathbf{I}$ とすることで、虚軸が不安定側に $\nu > 0$ だけシフトしたと考えることができる。したがって、Hamilton 行列の固有値は、 $\lambda_i + \nu$ と $-\lambda_i - \nu$ となり、閉ループ極は、 $-\lambda_i - \nu$ であることがわかる。
- (3) $-\lambda_i - 2\nu$ となる。つまり、 \mathbf{A} の固有値を $-\nu$ を通る直線に関して対称な位置に折り返したものになっている。なお、この問題では、 \mathbf{A} の固有値はすべて不安定であるとしたが、 $-\nu$ より左側にある固有値を含んでいる場合には、それは、閉ループ系の極となる。これは、その固有値が (2) において移動しないことから確認することができる。
- (4) Riccati 方程式 $(\mathbf{A} + \nu \mathbf{I})^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \nu \mathbf{I}) - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} = \mathbf{O}$ の解は、

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 288 & 48 \\ 48 & 8 \end{bmatrix}$$

となり、フィードバックゲインは、 $\mathbf{F} = [-48 \quad -8]$ と求まる。このときの閉ループ極は、 $\{-5, -7\}$ である。なお、 \mathbf{A} の固有値は、 $\{1, -5\}$ であり、 $\mathbf{A} + \nu \mathbf{I}$ の固有値は、 $\{4, -2\}$ である。したがって、(2) の操作で $\{-4, -2\}$ に移り、(3) の操作で $\{-7, -5\}$ に移る。

[トップへ戻る](#)

10 章

- 【1】(1) r から e までの伝達関数は、

$$\mathcal{G}_{er}(s) = \frac{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \alpha)}{s^3 + (\alpha + 2\zeta\omega_n)s^2 + (2\zeta\omega_n\alpha + \omega_n^2)s + (\omega_n^2\alpha + k\omega_n)}$$

となるので、Routh-Hurwitz の判定判別法より、 $-\omega_n\alpha < k < 2\zeta(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n\alpha + \alpha^2)$ を得る。

- (2) 最終値の定理より、

$$e(\infty) = \frac{\omega_n^2\alpha}{\omega_n^2\alpha + k\omega_n} = \frac{\alpha\omega_n}{\alpha\omega_n + k}$$

である。ちなみに、 $\alpha \rightarrow 0$ とすると、 $e(\infty) = 0$ となることがわかる。これは、 $\alpha > 0$ のときは、内部モデル原理を満たしていないが、 $\alpha = 0$ で、制御器が積分器となれば、内部モデル原理を満たすことを示している。

- 【2】定常特性が r から e までの周波数伝達関数 $\mathcal{G}_{er}(j\omega)$ を用いて $e(t) = |\mathcal{G}_{er}(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$ となることを利用する。まず、

$$\mathcal{G}_{er}(j\omega) = \frac{\beta(j\omega + 1)(2j\omega + \beta)}{\beta^2 + j\omega(\beta^2 - 2\beta\omega + 2\beta + k)}$$

であるので、そのゲインは、

$$|G_{er}(j\omega)| = \frac{\beta\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{4\omega^2+\beta^2}}{\sqrt{\beta^4+\omega^2(\beta^2-2\beta\omega+2\beta+k)^2}}$$

である。ここで、 β が十分小さいとすれば、

$$|G_{er}(j\omega)| \simeq \frac{2\beta\sqrt{\omega^2+1}}{k}$$

となり、 $k > 2\sqrt{\omega^2+1}$ を満たすように k を大きくとれば、 $|e(t)| < \beta$ とできる。内部モデル原理によると、 $\beta = 0$ とすれば、定常偏差が 0 になる。この問題は、 $\beta \neq 0$ であっても、 k を適切に選べば、定常偏差を目標値の振幅の β 倍以下にできることを示している。

【3】 $\bar{\mathbf{x}} := [\mathbf{x}^\top \ z]^\top$ とすると、

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_2 & k_2-1 & k_1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t)$$

となる。これより、 $k_1 = -2$ 、 $k_2 = -2$ を得る。

【4】 制御則を $u(t) = [-3 \ -1]\mathbf{x}(t) + Gr$ とすると、

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Gr = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}Gr$$

となる。なお、このシステムは安定である。ここで、 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}Gr$ 、 $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ の Laplace 変換は $y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{B}Gr/s$ となるので、最終値の定理を用いると、 $y(\infty) = -\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{B}Gr$ を得る。これより、 $\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{B}G = -1$ であれば、 $y(\infty) = r$ となるので、

$$G = -\frac{1}{\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{B}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

【別解】

$$G = [-\mathbf{F} \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ 1 \end{bmatrix}$$

を計算する。

【5】 (1) -4

(2) $\mathbf{F} = [-0.5 \ -0.25]$ 、 $G = 0.25$

- 【6】 $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\dot{x}(t) \ e(t)]^\top$ とし, $\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\dot{u}(t)$ となる拡大系を考える。このとき,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^2 \end{bmatrix}$$

である。このとき, Riccati 方程式の解は,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1+2q} & -q \\ -q & q\sqrt{1+2q} \end{bmatrix}$$

となる。これより, フィードバックゲインが $\mathbf{F} = -R^{-1}\bar{\mathbf{B}}^\top \mathbf{P} = [-(1 + \sqrt{1+2q}) \ q]$ と求まるので, 積分型サーボの制御則は,

$$u(t) = -(1 + \sqrt{1+2q})x(t) + q \int_0^t e(\tau) d\tau$$

となる。さらに, $y(s) = x(s) = 1/(s-1)u(s)$, $e(s) = r - y(s)$, $u(s) = (q/s)e(s) - (1 + \sqrt{1+2q})x(s)$ より,

$$\mathcal{G}_{er}(s) = \frac{e(s)}{r} = \frac{s(s + \sqrt{1+2q})}{s^2 + \sqrt{1+2q}s + q}$$

となる。これより, ステップ状の目標値に対して, 定常偏差が 0 になることがわかる。

[トップへ戻る](#)

11 章

- 【1】 (1) $\mathbf{L} = [-4 \ 3]^\top$

(2) 推定誤差を $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ とすると, $\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\mathbf{e}(t) + \mathbf{L}d(t)$ となる。したがって,

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{LC})t} \mathbf{e}(0) + \int_0^t e^{(\mathbf{A} + \mathbf{LC})(t-\tau)} \mathbf{L}d(\tau) d\tau$$

であるから, $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ が安定行列であることに注意して, $d(t) \equiv d_0$ として計算すると,

$$\mathbf{e}(\infty) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} d_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} - 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} d_0 \neq 0$$

となる。

(3) 外乱 d を状態に含めて, $\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^\top \ d]^\top$ とすると,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \ 1] = [1 \ 0 \ 1]$$

となる。このとき, 可観測性行列は,

$$\mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, $\text{rank} \mathbf{V}_o = 3$ より可観測である。これは, このシステムに対して同次元オブザーバを構成すれば, 外乱 d を推定できることを意味している。

【2】 状態変数を $\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^\top \ d]^\top$ とすると, 拡大系は,

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0 \ 0] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (1)$$

となる。これに対して, 同一オブザーバを構成する。行列 $\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}}$ の特性多項式は, $s^3 - l_1 s^2 - l_2 s - l_3 = 0$ となる。オブザーバ極はすべて -3 とするので, オブザーバゲインは, $\mathbf{L} = [-9 \ -27 \ -27]^\top$ となる。

【3】 まず, 同次元オブザーバのゲインは, $\mathbf{L} = [-6 \ -18]^\top$ となる。つぎに, 状態フィードバックゲインは, $\mathbf{F} = [-2 \ -2]$ となる。以上より,

$$\mathcal{K}(s) = -\mathbf{F}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BF} + \mathbf{LC}))^{-1}\mathbf{L} = \frac{-12(4s+3)}{(s+4+4j)(s+4-4j)}$$

が得られる。

【4】 まず, 状態フィードバックゲインは, $s^2 - f_2 s - f_1 = 0$ と $s^2 + 6s + 18 = 0$ より, $\mathbf{F} = [-18 \ -6]$ となる。つぎに, 最小次元オブザーバを設計する。 $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{22} = 0$, $\mathbf{A}_{12} = 1$, $\mathbf{B}_1 = 0$, $\mathbf{B}_2 = 1$ である。そして, オブザーバ極が -5 であるので, $\mathbf{L} = ((-5) - \mathbf{A}_{22})\mathbf{A}_{12}^{-1} = -5 \times 1 = -5$ となる。これより, $\mathbf{A}_\kappa := \mathbf{A}_{22} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{12} + (\mathbf{B}_2 + \mathbf{L}\mathbf{B}_1)f_2 = -11$,

$B_K = -A_K L + A_{21} + L A_{11} + (B_2 + L B_1) f_1 = -73$, $C_K = f_2 = -6$,
 $D_K = f_1 - f_2 L = -48$ となる。したがって,

$$K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1} B_K + D_K = \frac{-48s - 90}{s + 11}$$

が得られる。

【5】 システムの状態空間モデルは, $\mathbf{x} = [y \ \dot{y}]^\top$ とすると,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0]$$

となる。これに対して, 最小次元オブザーバを構成し, \dot{y} の推定値 \hat{x}_2 を求め, それを用いて, \dot{y} の推定値を $-y(t) - \hat{x}_2(t) + u(t)$ で計算すればよい。たとえば, オブザーバ極を -5 として, 最小次元オブザーバを設計する。 $\mathbf{A}_{11} = 0$, $\mathbf{A}_{12} = 1$, $\mathbf{A}_{21} = -1$, $\mathbf{A}_{22} = -1$, $\mathbf{B}_1 = 0$, $\mathbf{B}_2 = 1$ であるので, $\mathbf{L} = ((-5) - \mathbf{A}_{22})\mathbf{A}_{12}^{-1} = -4 \times 1 = -4$ となる。 $\mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}_{22}\mathbf{L} + \mathbf{L}(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{L} = -21$, $\mathbf{B}_2 + \mathbf{L}\mathbf{B}_1 = 1$ より, 最小次元オブザーバは,

$$\dot{z}(t) = -5z(t) - 21y(t) + u(t), \quad \hat{x}_2(t) = z(t) + 4y(t)$$

である。第2式を $-y(t) - \hat{x}_2(t) + u(t)$ に代入すれば, 結局,

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -5z(t) - 21y(t) + u(t) \\ \hat{y}(t) = -z(t) - 5y(t) + u(t) \end{cases}$$

となる。

【6】

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$$

として, $\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{C}^\top R^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{O}$ をとくと,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} R\sqrt{2a} & Ra \\ Ra & R\sqrt{2a}(a-1) \end{bmatrix}$$

を得る。ただし, $a = 1 + \sqrt{1 + q/R}$ である。これより, 最適オブザーバゲインは,

$$\mathbf{L}_{\text{opt}} = -\mathbf{P}\mathbf{C}^\top R^{-1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2a} \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2 + 2\sqrt{1 + q/R}} \\ -1 - \sqrt{1 + q/R} \end{bmatrix}$$

となる。以上より、定常 Kalman フィルタは

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) - \mathbf{L}_{\text{opt}} \left(y(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \right)$$

となる。

【7】 まず、

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})t} \mathbf{e}(0) + \int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})(t-\tau)} \mathbf{d}(\tau) d\tau$$

である。これを $\mathbf{P}(t) = \mathcal{E}[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}(t)^\top]$ に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})t} \mathcal{E} \left[\mathbf{e}(0)\mathbf{e}(0)^\top \right] e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})^\top t} \\ &\quad + \int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})(t-\tau)} \mathcal{E} \left[\mathbf{d}(\tau)\mathbf{e}(0)^\top \right] e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})^\top t} d\tau \\ &\quad + \int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})t} \mathcal{E} \left[\mathbf{e}(0)\mathbf{d}(\tau)^\top \right] e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})^\top (t-\tau)} d\tau \\ &\quad + \int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})(t-\tau)} d\tau \int_0^t \mathcal{E} \left[\mathbf{d}(\tau)\mathbf{d}(s)^\top \right] e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})^\top (t-s)} ds \end{aligned}$$

となる。第一項は $t \rightarrow \infty$ とすると零に収束する。そして、第二項、第三項は、 $\mathbf{d}(t)$ が白色雑音であり、 $\mathbf{e}(0)$ と $\mathbf{d}(t)$ が無相関であることから 0 になる。また、第四項は、

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})(t-\tau)} d\tau \int_0^t \mathcal{E} \left[\mathbf{d}(\tau)\mathbf{d}(s)^\top \right] e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})^\top (t-s)} ds \\ &= \int_0^t e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})\tau} (\mathbf{Q} + \mathbf{LRL}^\top) e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})^\top \tau} d\tau \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\mathbf{P}(\infty) = \int_0^\infty e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})\tau} (\mathbf{Q} + \mathbf{LRL}^\top) e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})^\top \tau} d\tau$$

となる。

[トップへ戻る](#)

12 章

【1】 $\angle \mathcal{K}_1(j\omega) = \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} \alpha T_1\omega$ である。これを ω について偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \angle \mathcal{K}_1(j\omega) = \frac{T_1}{(T_1\omega)^2 + 1} - \frac{\alpha T_1}{(\alpha T_1\omega)^2 + 1}$$

となる。これが 0 となる ω を求めると, $\omega_m = 1/(T_1\sqrt{\alpha})$ を得る。このとき,

$$\mathcal{K}_1(j\omega_m) = \frac{2\alpha + j\sqrt{\alpha}(1-\alpha)}{1+\alpha}, \quad \angle\mathcal{K}_1(j\omega_m) = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\alpha}(1-\alpha)}{2\alpha}$$

となる。ここで, $\tan^{-1} x = \sin^{-1}(x/\sqrt{1+x^2})$ を利用すると, $\angle\mathcal{K}_1(j\omega_m) = \sin^{-1}\{(1-\alpha)/(1+\alpha)\}$ が得られる。

【2】 【1】と同じように考えれば良い。

【3】 $\sin\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ を用いる。 $\phi_m = -\pi/4$ より, $\alpha = 3+2\sqrt{2}$ となる。さらに,

$$\mathcal{L}(s) = \mathcal{P}(s)\mathcal{K}_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \frac{\alpha(s+1)}{\alpha s+1} = \frac{\alpha}{(s+2)(\alpha s+1)}$$

より, $\mathcal{L}(0) = \alpha/2 = (3+2\sqrt{2})/2$ を得る。

【4】 (1)

$$|\mathcal{P}(j\omega)\mathcal{K}(j\omega)| = \frac{k_P}{(\sqrt{100+\omega^2})^4}$$

であるので, ゲイン交差周波数 ω_{gc} は, $|\mathcal{P}(j\omega_{gc})\mathcal{K}(j\omega_{gc})| = 1$ より,
 $\omega_{gc} = \sqrt{k_P^{1/2} - 100}$ となり, 位相余裕 PM は,

$$PM = 180 + \angle\mathcal{P}(j\omega_{gc})\mathcal{K}(j\omega_{gc}) = 180 - 4 \tan^{-1} \frac{\sqrt{k_P^{1/2} - 100}}{10}$$

となる。

(2) $\mathcal{P}(j\omega)$ が安定なので, $PM > 0 \text{ deg}$ のときに安定となる。これより,

$$\frac{\sqrt{k_P^{1/2} - 100}}{10} < 1$$

であれば安定になることがわかるので, $0 < k_P < 40000$ が得られる。

(3) $\sqrt{k_P^{1/2} - 100} = 10/\sqrt{3}$ より, $k_P = (400/3)^2$ となる。

【5】 一巡伝達関数 $\mathcal{L}(s) = P(s)K(s)$ とその周波数伝達関数は,

$$\mathcal{L}(s) = \frac{3k}{s(s+1)^2}, \quad \mathcal{L}(j\omega) = \frac{3k}{j\omega(j\omega+1)^2}$$

である。したがって, 位相 $\angle\mathcal{L}(j\omega)$ は,

$$\angle\mathcal{L}(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} \omega$$

である。これより, 位相交差周波数が $\omega = 1$ であることがわかる。一方,
 $|\mathcal{L}(1j)| = 3k/2$ なので, ゲイン余裕が 20 [dB] になるためには,

$$\frac{1}{|L(1j)|} = \frac{2}{3k} = 10$$

であればよい。したがって、 $k = 2/30 = 1/15$ となる。

- 【6】 まず、定常偏差を改善するために位相遅れ補償を設計する。ひとまず、 $\alpha = 20$ とし、ゲインを上げる周波数は、 T_1 で決めるが、最終的なゲイン交差周波数（ゲイン交差周波数の設計値）の 10 分の 1 程度を $1/T_1$ にするために、 $T_1 = 0.5$ とする（ $1/T_1 = 20/10 = 2$ ）。これより、

$$\mathcal{K}_1(s) = \frac{10s + 20}{10s + 1}$$

となる。つぎに、20 rad/s の位相を 120 deg にする。 $\mathcal{P}(s)\mathcal{K}_1(s)$ の 20 rad/s の位相が、-156 deg であるので、位相進み補償により、 $\phi_m = 36$ deg 位相を進ませる。そのために、 $\beta = (1 - \sin \phi_m)/(1 + \sin \phi_m)$ および、 $T_2 = 1/(20\sqrt{\beta})$ を計算する。これより、

$$\mathcal{K}_2(s) = \frac{0.09812s + 1}{0.02548s + 1}$$

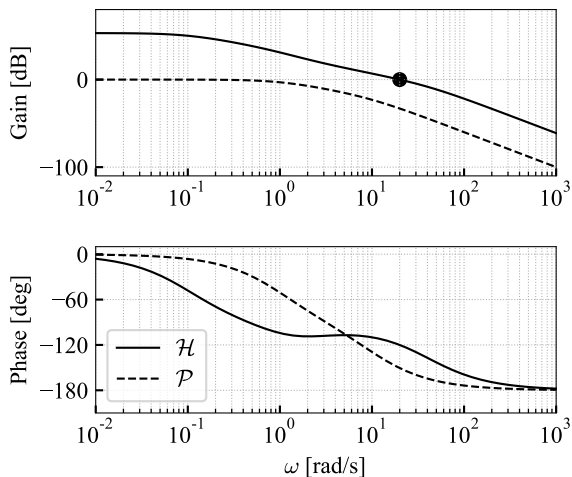
となる。最後に、20 rad/s のゲインが 0 dB となるようにゲイン補償を設計する。 $|\mathcal{P}(20j)\mathcal{K}_1(20j)\mathcal{K}_2(20j)| = 0.04405$ であるので、 $k = 22.70$ とする。以上の設計より、ゲイン交差周波数が 20 rad/s となり、位相余裕が 60 deg となる。

$$\mathcal{K}(s) = k\mathcal{K}_1(s)\mathcal{K}_2(s) = \frac{22.28s^2 + 271.6s + 454.1}{0.2548s^2 + 10.03s + 1}$$

目標値から偏差までの伝達関数は、

$$\mathcal{G}_{er}(s) = \frac{1}{1 + \mathcal{P}(s)\mathcal{K}(s)} = \frac{1}{1 + \frac{10}{s^2 + 11s + 10} \frac{22.28s^2 + 271.6s + 454.1}{0.2548s^2 + 10.03s + 1}}$$

であり、 $\mathcal{G}_{er}(0) = \frac{1}{1 + 454.1} = \frac{1}{455.1} \simeq 0.0022$ であるので、定常偏差が 0.01 以下になっていることがわかる。



解図 12.1: 開ループ系の Bode 線図

【7】 開ループ系の周波数伝達関数は

$$\mathcal{L}(j\omega) = k_P \frac{R}{j\omega} e^{jL\omega} = \frac{e^{jL\omega}}{jL\omega}$$

である。 $\omega_{gc} = 1/L$ のとき $\mathcal{L}(j\omega_{gc}) = 1$ となる。そして、 $\angle \mathcal{L}(j\omega_{gc}) = -1 - \pi/2$ である。したがって、位相余裕は $PM = \pi + \angle \mathcal{L}(j\omega_{gc}) = \pi/2 - 1 \text{ rad}$ となる。つまり、 $PM \simeq 32 \text{ deg}$ である。一方、 $\angle \mathcal{L}(j\omega) = -\omega L - \pi/2$ より、 $\omega_{pc} = \pi/(2L)$ のとき、 $\angle \mathcal{L}(j\omega_{pc}) = -\pi$ となる。そして、 $|\mathcal{L}(j\omega_{pc})| = 2/\pi$ である。したがって、ゲイン余裕は、 $GM = 20 \log_{10} 1/|\mathcal{L}(j\omega)| = 20 \log_{10} \pi/2 \simeq 4 \text{ dB}$ となる。

[トップへ戻る](#)

13 章

【1】

$$\Delta_a(s) = \frac{-0.01s}{(0.01s+1)(s+a)}$$

$$\Delta_m(s) = \frac{-0.01s}{0.01s+1}$$

【2】 $|\mathcal{P}(j\omega)|^2 = \omega^2 / ((1-\omega)^2 + \omega^2)$ であるので、これを ω で微分する。すると、

$$\frac{2\omega(1+\omega^2)(1-\omega^2)}{((1-\omega^2)^2 + \omega^2)^2}$$

となる。これより、 $\omega = 1$ で最大値をとることがわかるので、

$$\|\mathcal{P}\|_{\infty} = \sup_{\omega \geq 0} |\mathcal{P}(j\omega)| = 1$$

を得る。

【3】

$$\Sigma_{\mathcal{G}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathcal{P}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{\mathcal{T}} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathcal{P}} \\ \mathbf{B}_{\mathcal{T}} \end{bmatrix} u(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C}_{\mathcal{T}} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + 0 \cdot w(t) + \mathbf{D}_{\mathcal{T}} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{\mathcal{P}} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - w(t) + 0 \cdot u(t) \end{cases}$$

【4】 $\mathbf{x} := [\mathbf{x}_{\mathcal{P}}^{\top} \ \mathbf{x}_{\mathcal{S}}^{\top} \ \mathbf{x}_{\mathcal{T}}^{\top}]^{\top}$ とすると、一般化制御対象 \mathcal{G} は、

$$\Sigma_{\mathcal{G}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathcal{P}} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_{\mathcal{S}}\mathbf{C}_{\mathcal{P}} & \mathbf{A}_{\mathcal{S}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_{\mathcal{T}}\mathbf{C}_{\mathcal{P}} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{\mathcal{T}} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_{\mathcal{S}} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathcal{P}} \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mathcal{S}}\mathbf{C}_{\mathcal{P}} & \mathbf{C}_{\mathcal{S}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}_{\mathcal{T}}\mathbf{C}_{\mathcal{P}} & \mathbf{O} & \mathbf{C}_{\mathcal{T}} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mathcal{S}} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{\mathcal{P}} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - w(t) + 0 \cdot u(t) \end{cases}$$

となる。

【5】 閉ループ極を $\{-3, -3\}$ とするために

$$N_{\mathcal{P}} = \frac{1}{s+3}, \quad D_{\mathcal{P}} = \frac{s+2}{s+3} \quad (1)$$

とする。このとき、

$$\frac{1}{s+3}X + \frac{s+2}{s+3}Y = 1 \rightarrow X + Ys + 2Y = s+3 \quad (2)$$

より、 $X = 1, Y = 1$ を得る。したがって、

$$\mathcal{K}(s) = \frac{X + D_{\mathcal{P}}Q}{Y - N_{\mathcal{P}}Q} = \frac{1 + \frac{s+2}{s+3}Q}{1 - \frac{1}{s+3}Q} \quad (3)$$

であり、 $\mathcal{K}(0) = \infty$ になるためには、

$$1 = \frac{1}{3}Q(0) \quad (4)$$

を満たせば良い。したがって、 $Q(s) = 3$ とすれば、

$$\frac{1 + \frac{s+2}{s+3} \times 3}{1 - \frac{3}{s+3}} = \frac{s+3+3s+6}{s+3-3} = \frac{4s+9}{s} \quad (5)$$

となる。これは、PI 制御器である。ところで、閉ループ系の極は、

$$\phi(s) = s+3+3s+6+(s+2)(s+3-3) = s^2+6s+9 = (s+3)^2 \quad (6)$$

より、 $\{-3, -3\}$ である。

[トップへ戻る](#)

14 章

【1】

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \frac{1}{3}u[k] \end{cases}$$

- 【2】 インパルス応答のラプラス変換が伝達関数である。したがって、0 次ホールド回路にインパルス信号を印加したときの出力をラプラス変換すれば 0 次ホールド回路の伝達関数が求まる。したがって、

$$\mathcal{L}[u_s(t) - u_s(t - t_s)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-t_s s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-t_s s})$$

となる。

- 【3】 $z(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}_d) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_d^{k-1} z^{-k} = \mathbf{I}$ を示せば良い。

$$\begin{aligned} z(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}_d) \sum_{k=0}^N \mathbf{A}_d^{k-1} z^{-k} &= \sum_{k=0}^N \mathbf{A}_d^{k-1} z^{-k-1} - \sum_{k=0}^N \mathbf{A}_d^k z^{-k} \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{A}_d^N z^{-N} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、複素数 $z \in \mathbb{C}$ を $\mathbf{A}_d z^{-1}$ の固有値の絶対値がすべて 1 より小さくなるように選べば、 $N \rightarrow \infty$ で $\mathbf{A}_d^N z^{-N} \rightarrow 0$ となる。これより、上式が成り立つことがわかる。

【4】

$$s = \frac{2}{t_s} \frac{z-1}{z+1} = x + jy$$

とおき、 z について解く。そして、単位円の内部が $|z| < 1$ で表されることに注意して計算すると、 $x < 0$ を得る。これは、 s が左半面にあることを意味している。逆に、 $z = x + iy$ において、式 (14.21) に代入すると、

$$s = \frac{2}{t_s} \frac{x^2 + y^2 - 1 + j2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

となる。 s が左半面にあるとき、 $x^2 + y^2 - 1 < 0$ を得る。これは、 z が単位円内にあることを意味している。したがって、Tustin 変換による離散化では、連続時間システムの安定性が保存されることがわかる。

【5】 $A_d = e^{at_s}$, $B_d = (b/a)(e^{at_s} - 1)$, $C_d = 1$, $D_d = 0$

【6】

$$A_d = \frac{2 + at_s}{2 - at_s}, B_d = \frac{bt_s}{2 - at_s}, C_d = \frac{4}{2 - at_s}, D_d = \frac{bt_s}{2 - at_s}$$

【7】 (1) A_d の固有値は、0.5, 1 であるので、不安定である。

(2)

$$V_c = [B_d \quad A_d B_d] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、 $\text{rank } V_c = 2$ であるので、可到達である。

(3) $F = [-0.25 \quad -1.5]$

【8】 Riccati 方程式の解は、

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となるので、 $F = -(R + B_d^\top P B_d)^{-1} B_d^\top P A_d = [-0.5 \quad 0]$ を得る。さらに、閉ループ極は、 $\{1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}$ となる。

[トップへ戻る](#)

付 録

逆行列の計算

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A_{ij} をその (i, j) 要素 ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) とする. また逆に, (i, j) 要素が A_{ij} であるような行列を (A_{ij}) と表す.

余 因 子

行列 \mathbf{A} から第 i 行と第 j 列を除くと, $(n-1) \times (n-1)$ の小行列ができる. その小行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を乗じたものを \mathbf{A} の (i, j) 余因子といい, \tilde{A}_{ij} と表す.

余 因 子 行 列

(i, j) 要素として \mathbf{A} の (j, i) 余因子をもつような行列を \mathbf{A} の余因子行列といい, $\tilde{\mathbf{A}}$ と表す. 添字の入れ替えに注意されたい. すなわち, $\tilde{\mathbf{A}} := (\tilde{A}_{ji})^T$

余 因 子 展 開

\mathbf{A} の任意の第 i 行に着目すると, \mathbf{A} の行列式 $|\mathbf{A}|$ は, 第 i 行の各要素と対応する余因子の積の和で表される. すなわち,

$$|\mathbf{A}| = A_{i1}\tilde{A}_{i1} + \dots + A_{in}\tilde{A}_{in}$$

となる. 同様に, 第 j 列に着目すると

$$|\mathbf{A}| = A_{1j}\tilde{A}_{1j} + \dots + A_{nj}\tilde{A}_{nj}$$

となる. \mathbf{A} の中で比較的 0 の多い行または列に着目すると計算が容易である.

逆 行 列

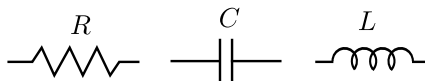
A と \tilde{A} の間には, $A\tilde{A} = A\tilde{A} = |A|I$ の関係がある. したがって, A が正則のとき, その逆行列は

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$$

となる. すなわち, 余因子行列と余因子展開によって求めることができる.

RLC 回路の基礎

基本受動素子である抵抗 R , 容量 C のコンデンサ, インダクタンス L のコイルのそれぞれについて, 両端の電圧 v と流れる電流 i の関係は以下の通り.



- 抵抗: $v = Ri$. 抵抗の単位は $[\Omega] = [V/A]$.
- コンデンサ (キャパシタ): 蓄積されている電荷を Q とすると, $Q = Cv$ の関係がある. 電荷の微分が電流, 電流の積分が電荷であるから, $Q(t) = \int i(t)dt$, $i(t) = \frac{dQ}{dt}$.
したがって $v(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt$, または $i(t) = C \frac{dv}{dt}$ となる.
なお電荷 Q の単位は $[C] = [A/s]$, 静電容量 C の単位は $[F] = [As/V]$ である.

コンデンサに電荷が蓄積されると, 電位差 (電圧) という形のポテンシャルエネルギーが蓄積される. 従って, コンデンサは, そのエネルギーに相当する状態をもつ動的システムである. 状態方程式でモデル化する際には $Q(t)$ または $v(t)$ などに相当する状態変数が必要である. また, 微分方程式を解く際には初期条件として $Q(0)$ あるいは $v(0)$ を定める必要がある.

- コイル: $v(t) = L \frac{di}{dt}$. インダクタンスの単位は $[H] = [Vs/A]$.

コイルに流れる電流を変化させようとすると, その変化を妨げる向きに誘導起電力が生じる (ファラデーの法則). いいかえれば, すでに電流が流れている状態では**磁気エネルギー**が蓄積されているということである. コイルもまた状態をもつ動的システムであり, 微分方程式を解く際には初期条件として $i(0)$ などを定める必要がある.

いずれについても, 電流の「上流側」の端子の電位が高く, 「下流側」の端子の電位が低い. つまり電流の流れる向きに沿って電圧降下するという原則を覚えておいてほしい.

抵抗・コンデンサ・コイルの両端電圧は, それぞれ電流の比例・積分・微分にあたる. 機械要素との**アナロジー**として, 「抵抗=ダンパ」「コンデンサ=ばね」「コイル=慣性質量」のイメージを押さえておくのもよい.

回路のモデリングにあたっては次の二法則が基本である.

(a) **Kirchhoff の電流則 (Kirchhoff's Current Law; KCL)**

回路網の任意の接続点において, 電流の総和はゼロである.

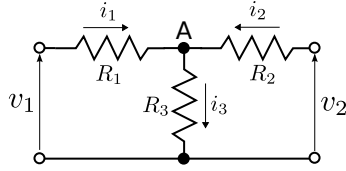
(b) **Kirchhoff の電圧則 (Kirchhoff's Voltage Law; KVL)**

回路網の任意の閉路において, 電圧の総和はゼロである.

KCL は, 接続点において入って来る電流と出て行く電流は等しいということの意味しており, KVL, ある電位の点から出発して, 閉路をぐるっと回ると同じ電位に戻るということを意味している. ただし電圧, 電流の向きと符号に注意すること. 回路全体で矛盾しないように, 最初に符号を決めておく必要がある.

例 1.1 下図の回路において, i_1, i_2, i_3 を v_1, v_2 を用いて表せ.

- 接続点 A における Kirchhoff の電流則より: $i_1 + i_2 - i_3 = 0$
- 左側の閉路に関する Kirchhoff の電圧則より: $v_1 - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0$
- 右側の閉路に関する Kirchhoff の電圧則より: $v_2 - R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0$



方程式は 3 本, 未知数は i_1, i_2, i_3 の 3 つである. これらを連立させて解けば

$$i_1 = \frac{R_2 + R_3}{r} v_1 - \frac{R_3}{r} v_2$$

$$i_2 = -\frac{R_3}{r} v_1 + \frac{R_1 + R_3}{r} v_2$$

$$i_3 = \frac{R_2}{r} v_1 + \frac{R_1}{r} v_2$$

(ただし $r := R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3$) を得る.
